Chapitre IV:

Recherche et simplification des fonctions logiques combinatoires

Introduction:

Le fonctionnement d'un système logique combinatoire est décrit:

- Littéralement: par une ou plusieurs propositions logiques.

- Numériquement: par sa table de vérité (état de la sortie pour toute les combinaisons des variables d'entrées).

- Algébriquement: par une fonction logique (en associant les variables par les opérateurs ET, OU et NON.

- Par une table de fonctionnement: décomposition en plusieurs blocs fonctionnels.

I- Fonctions logiques décrites par une table de vérité:

1/ Fonction complètement définie:

Il s'agit de fonctions dont la valeur est connue pour toutes les combinaisons des variables.

☞**Exemples:** *La fonction « Majorité de 3 variables »: MAJ(A,B,C)*

La fonction MAJ vaut 1 si la majorité (2 ou 3) des variables sont à l'état 1.

- *Table de vérité:*

Combinaison	A	B	C	MAJ(A,B,C)
C0	0	0	0	0
C1	0	0	1	0
C2	0	1	0	0
C3	0	1	1	1
C4	1	0	0	0
C5	1	0	1	1
C6	1	1	0	1
C7	1	1	1	1

2/ Fonction incomplètement définie:

Une fonction est dite incomplètement définie quand sa valeur est *indifférente* (ne change pas le résultat) ou *non spécifiée* (n'existent pas) pour certaines combinaisons de variables. Elles peuvent être physiquement impossible. On utilise le symbole X ou ∅ pour la valeur non spécifiée de la fonction.

☞ **Exemple:** Soit un clavier qui comporte 3 boutons poussoirs P1,P2 et P3 qui commandent une machine et qui possèdent un verrouillage mécanique telque 2 boutons adjacents ne peuvent pas être enfoncés simultanément.

Clavier:

P1	P2	P3
⊙	⊙	⊙
Marche Manuelle	Arrêt	Augmenter la Vitesse

Supposons que Pi appuyé = 1 et Pi relâché = 0, d'où la table de vérité de la fonction « Clavier » qui détecte au moins un poussoir déclenché:

P1	**P2**	**P3**	**Clavier**
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	∅
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	∅
1	1	1	∅

3/ Recherche d'une fonction logique à partir de sa table de vérité:

Prenons comme exemple la fonction MAJ précédente.

La fonction MAJ = 1 si on a: (C3) OU (C5) OU (C6) OU (C7)

soit: (A=0,B=C=1) OU (B=0,A=C=1) OU (C=0,A=B=1) OU (A=B=C=1)

Si Pi représente une fonction logique qui identifie une combinaison i, alors:

MAJ = P3 + P5 + P6 + P7

- *Recherche de Pi:*

P3 = 1 si (A=0) ET (B=1) ET (C=1)

Or un produit ne vaut 1 que si tous les termes du produit sont dans l'état 1.

D'où:

$P3 = \overline{A}.B.C$

$P5 = A.\overline{B}.C$

$P6 = A.B.\overline{C}$

$P7 = A.B.C$

$$\boxed{MAJ = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C}$$

II- Simplification des fonctions logiques:

Après la recherche de l'expression algébrique de la fonction, l'étape suivante consiste à minimiser le nombre de termes afin d'obtenir une réalisation matérielle plus simple donc plus facile à construire et à dépanner, en plus moins coûteuse.

Deux méthodes de simplification sont utilisées:

- La réduction algébrique
- Les tableaux de KARNAUGH (diagramme de KARNAUGH).

1/ La réduction algébrique:

Il s'agit d'appliquer les théorèmes et les propriétés de l'algèbre de Boole pour obtenir une expression plus simple de la fonction.

Exemple: Simplification de la fonction Majorité « MAJ »

$MAJ = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

$\forall$ X on a: $X+X = X$ et $X.\overline{A} + X.A = X$ (voir propriétés)

Soit: $X = A.B.C$

$$\begin{aligned} MAJ &= \overline{A}.B.C + A.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.C + A.B.\overline{C} + A.B.C \\ &= B.C.(A+\overline{A}) + A.C.(B+\overline{B}) + A.B.(C+\overline{C}) \\ &= B.C + A.C + A.B \end{aligned}$$

2/ Le tableau de KARNAUGH (T.K.):

La méthode de KARNAUGH permet de visualiser une fonction et d'en tirer intuitivement une fonction simplifier. L'élément de base de cette méthode est la table de KARNAUGH qui représente, sous forme de tableau, toutes les combinaisons d'états possibles pour un nombre de variable donné.

☞*Théorème d'adjacence :* deux mots binaires sont dit adjacents s'ils ne diffèrent que par la complémentarité d'une, et une seule, variable. Si deux mots sont adjacents sont sommés, ils peuvent être fusionnés et la variable qui diffère est éliminée. Par exemple, les mots ABC et ABC sont adjacents puisqu'ils ne diffèrent que par la complémentarité de la variable C. le théorème stipule donc que $\overline{A}BC + ABC = AB$.

☞Construction du tableau:

La table de KARNAUGH a été construite de façon à faire ressortir l'adjacence logique de façon visuelle.

- chaque case représente une combinaison de variables,
- la table de vérité est transposée dans le tableau en mettant dans chaque case la valeur de la fonction correspondante.

⇨ La fonction représentée par un T.K. s'écrit comme la somme des produits associés aux différentes cases contenant la valeur 1.

☞Règle à suivre pour un problème à n variables: (n>2)

Le T.K. comporte donc 2^n cases ou combinaisons, l'ordre des variables n'est pas important mais il faut respecter la règle suivante:

« Les monômes repérant les lignes et les colonnes sont attribués de telle manière que 2 monômes consécutifs ne diffèrent que de l'état d'une variable, il en résulte que 2 cases consécutives en ligne ou en colonne repèrent des combinaisons adjacentes ». on utilise donc le code GRAY.

- Exemple: n = 4

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}D$ 01	CD 11	$C\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	0000	0001	0011	0010
$\overline{A}B$ 01	0100	0101	0111	0110
AB 11	1100	1101	1111	1110
$A\overline{B}$ 10	1000	1001	1011	1010

☞ <u>Exemple de remplissage du T.K. à partir de la table de vérité:</u>

ABCD	F(A,B,C,D)
0 0 0 0	0
0 0 0 1	1
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	1
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	0
1 0 0 1	0
1 0 1 0	0
1 0 1 1	1
1 1 0 0	0
1 1 0 1	1
1 1 1 0	0
1 1 1 1	0

→

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	CD 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	0	1	0	0
$\overline{A}\,B$ 01	1	1	1	0
AB 11	0	1	0	0
$A\,\overline{B}$ 10	0	0	1	0

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}.\overline{C}.D+\text{-}A.B.\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D}+\overline{A}\,B.C.D+A.B.\overline{C}.D+A.\overline{B}.C.D$$

3/ Simplification des expressions logiques à l'aide du T.K.:

<u>a- Regroupement des cases adjacentes:</u>

☞ ***2 cases:***

- Exemple: *« Fonction MAJ: majorité de 3 variables »*

AB \ C	$\overline{C}$ 0	C 1
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	0	0
$\overline{A}\,B$ 01	0	1
AB 11	1	1
$A\,\overline{B}$ 10	0	1

X = $\overline{A}$.B.C+A.B.C = B.C (A change d'état)

Y = A.B.C+A$\overline{B}$.C = A.C (B change d'état)

Z = A.B.$\overline{C}$+A.B.C = A.B (C change d'état)

$$\boxed{MAJ = X+Y+Z = A.B+A.C+B.C}$$

Règle: « La réunion de 2 cases adjacentes contenant '1' élimine la variable qui change d'état quand on passe d'une case à l'autre ».

☞ ***4 cases:***

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	CD 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	0	0	0	0
$\overline{A}\,B$ 01	1	1	0	0
AB 11	1	1	0	0
$A\,\overline{B}$ 10	0	0	0	1

F1

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	CD 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	1			1
$\overline{A}\,B$ 01				
AB 11	1			1
$A\,\overline{B}$ 10	1			1

F2

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	CD 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	1			1
$\overline{A}\,B$ 01	1			
AB 11	1	1	1	1
$A\,\overline{B}$ 10	1			

F3

Exercice: Chercher les expressions des 3 fonctions F1, F2 et F3.

Règle: « 2 variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases par un seul terme produit qui ne comporte que les variables inchangées sur l'ensemble des 4 cases ».

☞ ***8 cases:***

- Exemple:

AB \ CD	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	CD 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	**1**			**1**
$\overline{A}\,B$ 01	**1**			**1**
AB 11	**1**			**1**
$A\,\overline{B}$ 10	**1**			**1**

$$F = \overline{C}\,.\,\overline{D} + C.\,\overline{D} = \overline{D}$$

Règle: « 3 variables disparaissent quand on regroupe 8 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 8 cases par un seul terme produit qui ne comporte que les variables inchangées sur l'ensemble des 8 cases ».

*** Remarques:**

- On ne peut regrouper que 2^n cases: 2, 4, 8, 16, ..
- On se limitera à des tableaux de 4 variables, pour résoudre par exemple un problème à 5 variables, on le décompose en 2 problèmes à 4 variables.

b- Traitement d'un problème de 5 variables:

Pour résoudre ce problème, il faut le décomposer en 2 problèmes à 4 variables en appliquant le théorème d'expansion de SHANNON:

$F(A,B,C,D,E) = \overline{E}.F(A,B,C,D,0) + E.F(A,B,C,D,1)$

c- Les valeurs indifférentes ou non spécifiées:

Le symbole ∅ peut prendre indifféremment la valeur 0 ou 1; on remplace donc par 1 uniquement ceux qui permettent de simplifier une expression par regroupement.

☞ **Exemple:**

ABC	**F(A,B,C)**
0 0 0	∅
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	∅
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	∅
1 1 1	1

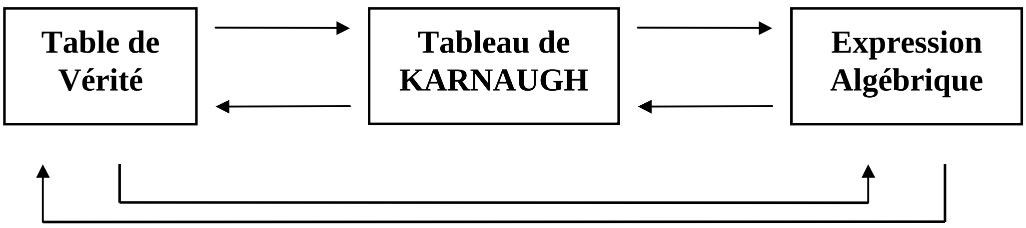
➔

AB \ *C*	0	1
00	∅	0
01	1	∅
11	∅	1
10	0	0

➔ F(A,B,C) = B

III- Résumé: (de la synthèse d'un système combinatoire)

* Différents aspects d'une fonction logique:



* Passage T.V. ==> T.K. ==> E.A.:

- Etape n°1: construire le tableau en repérant les lignes et les colonnes par les valeurs des combinaisons de variables.

- Etape n°2: transcrire les valeurs de la fonction dans les cases correspondantes.

- Etape n°3: chercher à effectuer des regroupements du plus grand nombre de '1' qui ont au moins un '1' qui n'a pas déjà été regroupé: 16 puis 8 puis 4 puis 2.

- Etape n°4: effectuer la somme logique de tous les termes produits des divers regroupements